УДК 517.988.6

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ VOLTERRA

© Е. С. Жуковский, M. J. Alves

E.S. Zhukovskiy, M.J. Alves. *About uniqueness of decisions of Volterra equations.* In this paper we formulate a new definition of Volterra operators, from which well-known definitions can be obtained. We study the solvability of non-linear equations with generalized Volterra operators. We introduce the notion of local, global and maximally extended solutions. The conditions of existence, uniqueness and extension of solutions for non-linear equations are obtained. Known and new assertions about solvability of concrete equations became corollary of theorems proved in this paper. Examples how to use the obtained results on investigation of Cauchy problem for functional differential equations are given.

ВВЕДЕНИЕ

Для описания динамики любого явления, процесса естественно использовать уравнения Вольтерра [1], поскольку настоящее состояние объекта всегда является следствием его развития, т.е. его "прошлого" и не может зависеть от "будущего". Исследование подобных уравнений основывается на свойствах интегрального оператора Вольтерра

$$(Kx)(t) \; = \; \int_a^t \mathcal{K}(t,s)\,x(s)\,ds, \tag{1}$$

обычно рассматриваемого в пространствах непрерывных или суммируемых функций. При весьма общих предположениях относительно функции $\mathcal{K}(\cdot,\cdot)$

a) оператор K вполне непрерывен или слабо вполне непрерывен;

b) спектральный радиус $\rho(K)$ оператора K равен нулю;

c) при любом значении "времени" ξ, из равенства $x_1(t) = x_2(t)$ при всех $t \leqslant \xi$ следует $(K\,x_1)(t) = (K\,x_2)(t)$ также при всех $t \leqslant \xi$.

Перечисленными свойствами обладают не только операторы вида (1), что позволяет расширить понятие вольтерровости. Коротко опишем два важнейших направления, на которые разделились многочисленные исследования обобщенно вольтерровых операторов.

Ряд авторов абстрактными вольтерровыми операторами называют линейные вполне непрерывные операторы, действующие в гильбертовом пространстве, спектральный радиус которых равен нулю. В основе такого определения – свойства a), b) интегрального оператора (1). Исследования М.В. Келдыша выявили важную роль таких операторов в теории несамосопряженных операторов. В работах М.С. Бродского, А.Л. Бухгейма, И.Ц. Гохберга, Г.Э. Киселевского, М.Г. Крейна, М.С. Лившица и многих других авторов создана плодотворная теория абстрактных вольтерровых операторов, устанавливающая глубокую связь этих операторов с "классическим" интегральным оператором Вольтерра. Оказывается, что абстрактные вольтерровые операторы после "несущественного расширения" [2] приобретают возрастающую цепочку инвариантных подпространств (заметим, что свойство c) означает существование у оператора (1) инвариантных подпространств, образованных такими функциями $x(\cdot)$, что $x(t) = 0$ при $t \leqslant \xi$). Эта цепочка позволяет получить треугольное представление абстрактного вольтеррового оператора – аналог формулы (1).

В основе другого подхода к обобщению определения вольтерровости, свойство c) интегрального оператора, отражающее "последействие", "эволюцию" и другие подобные характеристики реальных явлений и процессов. В 1929 г. L. Tonelli выделил в самостоятельный класс операторы, обладающие таким свойством [3]. Первые результаты исследования "операторов типа Вольтерра" были получены D. Graffi [4] и S. Cinquini [5]. Большое влияние на развитие представлений о вольтерровых операторах оказала вышедшая в 1938 г. статья А.Н. Тихонова [6]. Широкое признание этой работы подтверждается термином вольтерровости по А.Н. Тихонову, применяемым многими авторами к операторам, удовлетворяющим условию c). Теория вольтерровых по А.Н. Тихонову операторов продолжает развиваться и находить новые приложения. Ю.А. Дядченко в [7] исследовал уплотняющие вольтерровые по А.Н. Тихонову операторы в функциональных пространствах. В работах М.А. Красносельского, А.В. Покровского [8], M. Artola [9], K. Gröger [10, 11] изучались возникающие в теории дифференциальных уравнений в банаховом пространстве уравнения Вольтерра относительно функций со значениями в бесконечномерном пространстве. А.И. Булгаков рассмотрел условия разрешимости и свойства множеств решений включений с вольтерровыми по А.Н. Тихонову многозначными отображениями в пространствах непрерывных и суммируемых функций [12]. Вольтерровые по А.Н. Тихонову операторы широко используются в теории "классических", сингулярных, импульсных функционально-дифференциальных уравнений [13-16]. В связи с изучением конкретных проблем в различных математических теориях (спектральная теория, общая теория систем, функционально-дифференциальные уравнения, уравнения математической физики, приближенные методы и др.) рядом авторов предложены абстрактные трактовки свойства "эволюции" операторов [17-24]. Большинство современных определений означает, что вольтерровый оператор линеен и обладает цепочкой инвариантных подпространств.

В настоящей работе предложено определение вольтерровости операторов, частными случаями которого являются известные определения, трактующие эволюцию операторов. Рассмотрены утверждения о существовании, единственности, продолжаемости решений уравнений с вольтерровыми операторами. Линейность операторов не предполагается.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВОЛЬТЕРРОВОСТИ

Будем пользоваться следующими обозначениями: R^m – пространство векторов (столбцов), имеющих m вещественных компонент, с нормой $|x|$; $L([a,b],R^m)$ – пространство суммируемых вектор-функций $y:[a,b]\to R^m$ с нормой $\|y\|_L=\int\limits_a^b|y(s)|ds$; $AC([a,b]\,R^m)$ – пространство таких абсолютно непрерывных вектор-функций $x:[a,b]\to R^m$, что $x'\in L([a,b]\,R^m)$, с нормой $\|x\|_{AC}=\|x'\|_L+|x(c)|$, $c\in[a,b]$. В обозначениях пространств будем опускать индекс $m=1$; в обозначениях функциональных пространств не будем писать, где определены и в каких множествах имеют значения функции – элементы пространств, если это не вызовет недоразумений.

Пусть B банахово вещественное или комплексное пространство. Сопоставим каждому $\gamma\in[0,1]$ отношение эквивалентности $\upsilon(\gamma)$ на множестве B. Назовем элементы $x,y\in B$, удовлетворяющие этому бинарному отношению, $\upsilon(\gamma)$-эквивалентными. Будем предполагать, что совокупность

$\mathfrak{V}=\{\,\upsilon(\gamma)\mid\gamma\in[0,1]\,\}$

удовлетворяет следующим условиям:

V_0) $\gamma=0$ соответствует отношение $\upsilon(0)=B^2$ (т.е. любые два элемента являются $\upsilon(0)$-эквивалентными);

V_1) $\gamma=1$ соответствует отношение равенства (т.е. никакие два разных элемента не вступают в отношение $\upsilon(1)$);

V) если $\gamma>\eta$, то $\upsilon(\gamma)\subset\upsilon(\eta)$ (любые два $\upsilon(\gamma)$-эквивалентные элемента $x,y\in B$ будут $\upsilon(\eta)$-эквивалентными, если $\gamma>\eta$);

L) отношения $\upsilon(\gamma)\in\upsilon$ сохраняются при сложении векторов и умножении их на числа, т.е. при каждом $\gamma\in(0,1)$, для любых элементов $x,\widehat{x},y,\widehat{y}\in B$ и всякого числа λ из $(x,\widehat{x})\in\upsilon(\gamma)$, $(y,\widehat{y})\in\upsilon(\gamma)$ следует $(x+y,\widehat{x}+\widehat{y})\in\upsilon(\gamma)$, $(\lambda x,\lambda\widehat{x})\in\upsilon(\gamma)$.

B) для любого $\gamma\in(0,1)$ всякая сходящаяся последовательность $\upsilon(\gamma)$-эквивалентных нулю элементов имеет пределом также $\upsilon(\gamma)$-эквивалентный нулю элемент, т.е. если $\|x_i - x\|_B \to 0$, где $(x_i, 0) \in \upsilon(\gamma)$ при всех i, то $(x, 0) \in \upsilon(\gamma)$.

При каждом фиксированном $\gamma \in (0,1)$ обозначим $B/\upsilon(\gamma)$ – фактор-пространство, $\overline{x}_\gamma$ – класс элементов, $\upsilon(\gamma)$-эквивалентных элементу $x \in B$ (класс смежности), т.е. $\overline{x}_\gamma \in B/\upsilon(\gamma)$. Нулевой элемент фактор-пространства $\overline{0}_\gamma = \{y \in B \mid (y, 0) \in \upsilon(\gamma)\}$ является подпространством пространства B. Условие B) означает, что подпространство $\overline{0}_\gamma$ замкнуто. Зададим в фактор-пространстве $B/\upsilon(\gamma)$ норму равенством $\|\overline{x}_\gamma\|_{B/\upsilon(\gamma)} = \inf\limits_{x \in \overline{x}_\gamma} \|x\|_B$. Из замкнутости подпространства $\overline{0}_\gamma$ следует, что при таком определении нормы фактор-пространство $B/\upsilon(\gamma)$ является банаховым [25, с.128-130].

Определим при любом $\gamma \in (0,1)$ каноническую проекцию $\Pi_\gamma : B \to B/\upsilon(\gamma)$ равенством $\Pi_\gamma x = \overline{x}_\gamma$. Каноническая проекция – линейное ограниченное отображение, $\|\Pi_\gamma\| = 1$. Зададим отображение $Z : (0,1) \times B \to R$, $Z(\gamma, y) = \|\Pi_\gamma y\|_{B/\upsilon(\gamma)}$. При каждом $y \in B$ функция $Z(\cdot, y)$ не убывает, и поэтому существует $\lim\limits_{\gamma \to 0+0} Z(\gamma, y) = z_0(y)$. Доопределим отображение Z значением $Z(0, y) = z_0(y)$. Далее, будем считать $Z(1, y) = \|y\|_B$. Таким образом, отображение Z задано на $[0,1] \times B$.

Определение 1. Оператор $F : B \to B$ будем называть *вольтерровым на системе* $\mathfrak{V}$, если для каждого $\gamma \in (0,1)$ и любых $x, y \in B$ из $(x, y) \in \upsilon(\gamma)$ следует $(Fx, Fy) \in \upsilon(\gamma)$. Таким образом, вольтерровый оператор сохраняет отношение эквивалентности $\upsilon(\gamma)$, $\forall \gamma \in (0,1)$, отображая эквивалентные элементы пространства B в эквивалентные.

Для вольтеррового на системе $\mathfrak{V}$ оператора $F : B \to B$ обозначим $F_\gamma : B/\upsilon(\gamma) \to B/\upsilon(\gamma)$, $F_\gamma \overline{x}_\gamma = \Pi_\gamma Fx$, где x – любой элемент класса $\overline{x}_\gamma$. Это определение корректно, поскольку, вследствие вольтерровости оператора F, образы любых двух $\upsilon(\gamma)$-эквивалентных элементов $x, y \in B$ принадлежат одному классу $\upsilon(\gamma)$-эквивалентности, т.е. $\Pi_\gamma Fx = \Pi_\gamma Fy$. Отметим, что натуральную степень $(F_\gamma)^i : B/\upsilon(\gamma) \to B/\upsilon(\gamma)$ оператора F_γ можно находить с помощью равенства $(F_\gamma)^i \overline{x}_\gamma = \Pi_\gamma F^i x$, $x \in \overline{x}_\gamma$, т.е. $(F_\gamma)^i = (F^i)_\gamma$.

РАЗРЕШИМОСТЬ УРАВНЕНИЙ VOLTERRA

Определим понятие решения уравнения

$$Fx = 0 \tag{2}$$

с вольтерровым на системе $\mathfrak{V}$ оператором $F : B \to B$.

Определение 2. Если существуют число $\gamma \in (0,1)$ и класс эквивалентности $\overline{z}_\gamma \in B/\upsilon(\gamma)$, удовлетворяющий равенству $F_\gamma \overline{z}_\gamma = \overline{0}_\gamma$, то уравнение (2) будем называть *локально разрешимым*, а класс $\overline{z}_\gamma$ – его $\upsilon(\gamma)$-*локальным решением*. Элемент $z \in B$, удовлетворяющий уравнению (2), назовем *глобальным решением*. Отождествляя элемент $z \in B$ с классом $\upsilon(1)$-эквивалентности $\overline{z}_1 = \{z\}$, содержащим лишь один этот элемент, будем глобальным решением считать также класс $\overline{z}_1$. Если $0 < \xi < \gamma \leqslant 1$ и если $\overline{z}_\gamma$, $\overline{z}_\xi$ – соответственно $\upsilon(\gamma)$-локальное (или глобальное при $\gamma = 1$) и $\upsilon(\xi)$-локальное решения, удовлетворяющие включению $\overline{z}_\gamma \subset \overline{z}_\xi$, то будем называть решение $\overline{z}_\gamma$ продолжением решения $\overline{z}_\xi$, а решение $\overline{z}_\xi$ частью решения $\overline{z}_\gamma$. Заметим, что для произвольного локального или глобального решения $\overline{z}_\gamma$, вследствие условия V), при любом $\xi \in (0,\gamma)$ существует единственный класс $\overline{z}_\xi \in B/\upsilon(\xi)$, для которого имеет место $\overline{z}_\gamma \subset \overline{z}_\xi$. Класс $\overline{z}_\xi$ будет частью решения $\overline{z}_\gamma$. Этот факт позволяет отождествить каждое локальное или глобальное решение $\overline{z}_\gamma$ с отображением, ставящим в соответствие $\xi \in (0,\gamma]$ такой класс $\overline{z}_\xi \in B/\upsilon(\xi)$, что $\overline{z}_\gamma \subset \overline{z}_\xi$. Отображение $\xi \in (0,\gamma) \mapsto \overline{z}_\xi \in B/\upsilon(\xi)$, удовлетворяющее условиям:

$\forall \eta, \xi \quad 0 < \eta < \xi < \gamma \;\Rightarrow\; \overline{z}_\xi \subset \overline{z}_\eta$,

$\lim\limits_{\xi \to \gamma - 0} \|\overline{z}_\xi\|_{B/\upsilon(\xi)} = \infty$,

будем называть *предельно продолженным решением*. Любое сужение такого отображения на $(0,\eta] \subset (0,\gamma)$ (конечно, являющееся локальным решением) будем называть частью предельно продолженного решения.

Определенные здесь понятия локального, глобального, предельно продолженного решений являются естественным обобщением понятий решений дифференциальных уравнений, интегральных уравнений Вольтерра, функционально-дифференциальных уравнений эволюционного типа, других уравнений с вольтерровыми по А.Н. Тихонову операторами. Для перечисленных уравнений решение ищется в каком-либо множестве функций, определенных на $[a, b]$. Под локальным решением понимают функцию z_c, определенную на $[a, c]$, $c < b$, и удовлетворяющую на этом отрезке заданному уравнению. Функция z_c может отождествляться с классом функций, являющихся всевозможными ее продолжениями на весь $[a, b]$. Таким образом, приведенные выше определения решений абстрактных уравнений в случае "классических" уравнений Volterra равносильны известным определениям.

Рассмотрим утверждения о неподвижных точках вольтеррового на $\mathfrak{V}$ оператора $K : B \to B$, т.е. исследуем разрешимость уравнения

$$x - Kx = 0, \tag{3}$$

являющегося частным случаем уравнения (2).

Определение 3. Оператор $K : B \to B$ назовем *локально сжимающим на системе* $\mathfrak{V}$, если найдется такое $q < 1$, что для любого $r > 0$ существует $\tau > 0$, при котором для всех $x, y \in B$, $\|x\| \leqslant r$, $\|y\| \leqslant r$, выполнено:

1. $Z(\gamma, Kx - Ky) \leqslant q \cdot Z(\gamma, x - y)$ при всех $\gamma \in (0, \tau)$;
2. при всех $\xi, \gamma \in (0, 1]$, $\xi < \gamma < \xi + \tau$ из равенства $\Pi_\xi x = \Pi_\xi y$ следует $Z(\gamma, Kx - Ky) \leqslant q \cdot Z(\gamma, x - y)$.

Класс локально сжимающих на системе $\mathfrak{V}$ операторов достаточно широк. Ему, конечно же, принадлежат не только сжимающие операторы. Важно заметить, что свойством локальной сжимаемости могут обладать даже операторы, не являющиеся непрерывными и ограниченными.

Теорема 1. *Пусть оператор $K : B \to B$ является вольтерровым и локально сжимающим на системе $\mathfrak{V}$. Тогда существует единственное глобальное или предельно продолженное решение уравнения (3), и всякое локальное решение является частью этого решения.*

Определение 4. Оператор $K : B \to B$ назовем *равностепенно локально сжимающим на системе* $\mathfrak{V}$, если найдутся такие $q < 1$, $\tau > 0$, что для всех $x, y \in B$ выполнены условия:

1. $Z(\gamma, Kx - Ky) \leqslant q \cdot Z(\gamma, x - y)$ при всех $\gamma \in (0, \tau)$;
2. при всех $\xi, \gamma \in (0, 1]$, $\xi < \gamma < \xi + \tau$ из равенства $\Pi_\xi x = \Pi_\xi y$ следует $Z(\gamma, Kx - Ky) \leqslant q \cdot Z(\gamma, x - y)$.

Теорема 2. *Пусть оператор $K : B \to B$ является вольтерровым и равностепенно локально сжимающим на системе $\mathfrak{V}$. Тогда существует единственное глобальное решение уравнения (3), и всякое локальное решение является частью этого решения.*

Следствие. *Если линейный оператор $K : B \to B$ удовлетворяет условиям теоремы 2, то для его спектрального радиуса имеет место оценка $\rho(K) \leqslant q$.*

РАЗРЕШИМОСТЬ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Задача Коши для функционально-дифференциального уравнения может быть сведена к уравнению (3), что позволяет применить к исследованию разрешимости этой задачи полученные выше результаты.

Пример. Рассмотрим задачу Коши

$$x'(t) = A(t)\left(x(\vartheta(t))\right)^2, \quad t \in [-2, 2],$$
$$x(\zeta) = 0, \quad \text{если } \zeta \notin [-2, 2]; \tag{4}$$

$$x(0) = \alpha. \tag{5}$$

Здесь $A \in L([-2, 2], R)$, функция $\vartheta : [-2, 2] \to R$ определена равенством (см. рис. 1)

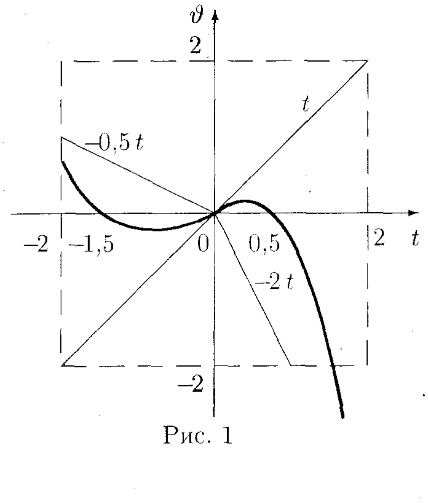

Рис. 1

$$\vartheta(t) = \begin{cases} -2t^2+t, & \text{если} \quad t\in[0,2], \\ 0,25(2t^2+3t), & \text{если} \quad t\in[-2,0). \end{cases}$$

Отметим, что $\vartheta(t) \in [-2,2]$ тогда и только тогда, когда $t\in[-2,\beta]$, $\beta = \dfrac{1+\sqrt{17}}{4}$.

Решением считаем абсолютно непрерывную функцию $x \in AC([-2,2],R)$, удовлетворяющую при п.в. t уравнению (4) и условию (5). Запишем задачу (4,5) в виде уравнения относительно производной решения $y = x'$

$$y(t) = A(t)\chi(-2,\beta,t)\Big(\alpha+\int\limits_{-2}^{2}\chi(0,\vartheta(t),s)\,y(s)\,ds\Big)^2 \qquad (6)$$

где $\chi(\nu,\eta,t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \nu\leqslant t<\eta, \\ -1, & \text{если} \quad \eta<t\leqslant\nu, \\ 0, & \text{при остальных } \nu,\eta,t. \end{cases}$

Заданный равенством

$$Ky = A(\cdot)\chi(-2,\beta,t)\Big(\alpha+\int\limits_{-2}^{2}\chi(0,\vartheta(\cdot),s)\,y(s)\,ds\Big)^2$$

оператор $K: L([-2,2],R)\to L([-2,2],R)$ не обладает свойством вольтерровости по А.Н. Тихонову. Но этот оператор является вольтерровым на системе отношений эквивалентности: $(u,y)\in v(\gamma)$, если $u(t)=y(t)$ на множестве $e_\xi = [-\frac{2}{3}\xi, \frac{1}{3}\xi]$, $\xi\in[0,\beta]$; $e_\xi = [-2,-2+\xi]$, $\xi\in(\beta,2]$.

Оператор $K: L([-2,2],R)\to L([-2,2],R)$ не является локально сжимающим, поэтому к уравнению (6) непосредственно нельзя применять теоремы 1,2. Тем не менее, можно построить уравнение с локально сжимающим оператором, равносильное (6). Для этого оценим любое решение задачи (4,5). Оно удовлетворяет неравенству $|x(t)|' \leqslant |x'(t)| = |A(t)|\,((S_\vartheta x)(t))^2 = |A(t)|\cdot|(S_\vartheta|x|)(t)|\cdot(S_\vartheta|x|)(t)$, где

$$(S_\vartheta x)(t) = \begin{cases} x(\vartheta(t)), & \text{если} \quad t\in[0,\beta], \\ 0, & \text{если} \quad t\in(\beta,0]. \end{cases}$$

При $t\in[0;0,5]$ рассмотрим вспомогательное уравнение

$$y(t) = |A(t)|\Big(|\alpha|+\int\limits_0^{0,5}\chi(0,\vartheta(t),s)\,y(s)\,ds\Big)\cdot \Big||\alpha|+\int\limits_0^{0,5}\chi(0,\vartheta(t),s)\,y(s)\,ds\Big|. \qquad (7)$$

Оператор $\overline{K}: L([0;0,5],R)\to L([0;0.5],R)$,

$$(\overline{K}y)(t) = |A(t)|\Big(|\alpha|+\int\limits_0^{0,5}\chi(0,\vartheta(t),s)\,y(s)\,ds\Big)\cdot \Big||\alpha|+\int\limits_0^{0.5}\chi(0,\vartheta(t),s)\,y(s)\,ds\Big|,$$

является монотонным и вполне непрерывным. Согласно [23, теоремы 5,6], уравнение (7) имеет локальное верхнее решение $\overline{y}_\gamma$, определенное на некотором отрезке $[0,\xi]$, $\xi=\gamma(b-a)>0$, и это решение удовлетворяет при всех $t\in[0,\xi]$ неравенству $\overline{y}_\gamma(t)\geqslant|x'(t)|$. Аналогично, при $t\in[-2\xi,0]\subset[-1;0]$ получаем $\overline{y}_\gamma(t)\geqslant|x'(t)|$. Здесь $\overline{y}_\gamma$ – верхнее решение уравнения

$$y(t) = |A(t)|\Big(|\alpha|-\int\limits_{-0,5}^{0}\chi(0,\vartheta(t),s)\,y(s)\,ds\Big)\cdot \Big||\alpha|-\int\limits_{-0,5}^{0}\chi(0,\vartheta(t),s)\,y(s)\,ds\Big|.$$

Определим отображение

$\Upsilon: L([-2,2],R)\to L([-2,2],R)$ равенством

$$(\Upsilon y)(t) = \begin{cases} y(t), & \text{если} \quad t\in[-2,-2\xi]\cup[\xi,1], \\ y(t), & \text{если} \quad t\in[-2\xi,\xi], \ |y(t)|\leqslant\overline{y}_\gamma(t), \\ \overline{y}_\gamma(t), & \text{если} \quad t\in[-2\xi,\xi], \ y(t)\geqslant\overline{y}_\gamma(t), \\ -\overline{y}_\gamma(t), & \text{если} \quad t\in[-2\xi,\xi], \ y(t)\leqslant-\overline{y}_\gamma(t). \end{cases}$$

Уравнение (6) и, соответственно, задача Коши (4,5) равносильны уравнению $y(t) = (K\Upsilon y)(t)$. Докажем, что оператор $K\Upsilon$ равностепенно локально сжимающий. Для любого положительного $\tau<3\xi$ имеем $\|\Pi_\tau K\Upsilon y_1 - \Pi_\tau K\Upsilon y_2\|_{L(e_\tau)} =$

$$\Big\|A(\cdot)\Big(\alpha+\int\limits_{e_\tau}\chi(0,h(\cdot),s)\,(\Upsilon y_1)(s)\,ds\Big)^2 - A(\cdot)\Big(\alpha+\int\limits_{e_\tau}\chi(0,h(\cdot),s)\,(\Upsilon y_2)(s)\,ds\Big)^2\Big\|_{L(e_\tau)} \leqslant$$

$$\leqslant \Big\|A(\cdot)\Big(2\alpha+\int\limits_{e_\tau}\overline{y}_\gamma(s)\,ds\Big)\Big\|_{L(e_\tau)}\cdot \Big\|\int\limits_{e_\tau}\chi(0,h(\cdot),s)\,(y_1(s)-y_2(s))\,ds\Big\|_{L_\infty(e_\tau)} \leqslant$$

$$\leqslant \Big\|A(\cdot)\Big(2\alpha+\int\limits_{e_\tau}\overline{y}_\gamma(s)\,ds\Big)\Big\|_{L(e_\tau)}\cdot\|y_1-y_2\|_{L(e_\tau)}.$$

Вследствие равномерной непрерывности интеграла, для любого $q\in(0,1)$ найдется такое $\tau>0$, что $\Big\|A(\cdot)\Big(2\alpha+\int\limits_{e_\tau}\overline{y}_\gamma(s)\,ds\Big)\Big\|_{L(e_\tau)} < q$. Таким образом, проверено первое условие в определении равностепенной локальной сжимаемости оператора $K\Upsilon$. Второе условие следует из существования положительного числа σ для которого выполнены неравенства $-2(t-\sigma)\leqslant\vartheta(t)\leqslant t-\sigma$, при всех $t\geqslant\frac{1}{3}\tau$ и $t+\sigma\leqslant\vartheta(t)\leqslant-0,5(t+\sigma)$, при всех $t\leqslant-\frac{2}{3}\tau$. Согласно теореме 2 задача (4,5) при любом α имеет единственное глобальное решение, всякое локальное решение является частью этого глобального решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1977. 342 с.

2. *Бухгейм А.Л.* Уравнения Вольтерра и обратные задачи. Новосибирск: Наука, 1983. 208 с.

3. *Tonelli. L.* Sulle equazioni funzionali del tipo di Volterra. Bull. Calcula. Math. Soc. 1929, v. 20, p. 31-48 (Opere scelte 4, p. 198-212).

4. *Graffi D.* Sopra una equazione funzionali e la sua applicazione a un problema di fisica ereditaria. Ann. Math. Pura. Appl. 1931, v. 9, p. 143-179.

5. *Cinquini S.* Sulle equazioni funzionali del tipo di Volterra. Rend. Accad. Naz. Lincei. 1933, v. 17, p. 616-621.

6. *Тихонов А.Н.* О функциональных уравнениях типа Volterra и их применениях к некоторым задачам математической физики // Бюл. Моск. ун-та. Секц. А. 1938. Вып. 8. Т. 1. С. 1-25.

7. *Дядченко Ю.А.* О локальной разрешимости операторных уравнений // Качеств. и приближ. методы исследования операторных уравнений. Ярославль, 1978. № 3. С. 48-60.

8. *Красносельский М.А., Покровский А.В.* Виброустойчивость решений дифференциальных уравнений // ДАН СССР. 1970. Т.195. С. 544-547.

9. *Artola M.* Sur les perturbations des equations d'evolution. Application a des problemes de retard, Ann. E. N. S., 1969. v. 2, p. 137-253.

10. *Gröger K.* Zur Teorie nichtlinearer Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung mit Gedächtnis in Banach-bzw. Hilbert-Räumen, Math. Nachr., 1973, v. 56, p. 161-167.

11. *Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978. 336 с.

12. *Булгаков А.И.* Элементы теории краевых задач для функционально-дифференциальных включений. Дис. докт. физ.-мат. наук. Тамбов. Тамбовский институт химического машиностроения. 1993. 300 с.

13. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Институт компьютерных исследований. 2002. 384 с.

14. *Шиндяпин А.И.* О краевой задаче для одного сингулярного уравнения // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 3. С. 450-455.

15. *Азбелев Н.В., Алвеш М.Ж., Е.И. Бравый.* О сингулярной краевой задаче для линейного дифференциального уравнения второго порядка // Известия вузов. Математика. 1999. № 2. С. 1-12.

16. *Анохин А.В.* О линейных импульсных системах для функционально-дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1986. Т. 28. №5. С. 1037-1040.

17. *Забрейко П.П.* Об интегральных операторах Вольтерра // УМН. 1967. Вып. 1. Т. 22. С. 167-168.

18. *Курбатов В.Г.* Об обратимости запаздывающих операторов // Теория операторных уравнений. Воронеж, 1979. С. 43-52.

19. *Feintuch A., Saeks R.* System Theory. A Hibert space approach. Academic Press. New York, London, 1982.

20. *Гусаренко С.А.* Об одном обобщении понятия вольтеррова оператора // Докл. АН СССР. 1987. Т. 295. № 5. С. 1046-1049.

21. *Сумин В.И.* Функционально-операторные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами // Докл. АН СССР. 1989. Т. 305. № 5. С. 1056-1059.

22. *Жуковский Е.С.* Линейные эволюционные функционально-дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. Тамбов: Изд-во ТГУ, 2003. 140 с.

23. *Жуковский Е.С.* Неравенства Вольтерра в функциональных пространствах // Матем. сб., 2004. Т. 195. № 9. С. 3-18.

24. *Жуковский Е.С.* Непрерывная зависимость от параметров решений уравнений Вольтерра // Матем. сб., 2006. Т. 220. № 10. С. 33-56.

25. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 04-01-00324), Норвежского комитета по развитию университетской науки и образования NUFU (research grant PRO 06/2002)

Выражаем благодарность всем сотрудникам кафедры алгебры и геометрии Тамбовского государственного университета им. Г.Р. Державина, Departament de Matematica e Informatica Universidade Eduiardo Modlane (Maputo, Mozambique) за полезное обсуждение результатов работы.

Поступила в редакцию 28 мая 2006 г.